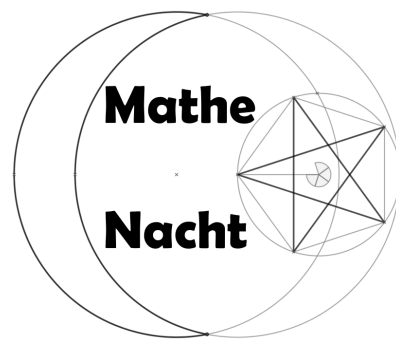
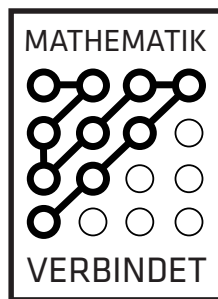


Topologie und Stetigkeit



1. Aufgabe:

Es sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ gegeben durch:

$$\|(x, y)\| := |y| + |3x - 2y|$$

Untersuche, ob dadurch eine Norm auf \mathbb{R}^2 definiert wird.

2. Aufgabe:

Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 offen/ abgeschlossen/beschränkt (bezüglich der euklidischen Norm) sind. Gib außerdem zu jeder Menge die Menge aller Randpunkte und das Innere an. Skizziere die Mengen A, B, C, D, E .

- a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \leq 2\}$
- b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0\} \cup \{(2, 3)\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq \|x\|_2 < 4\}$
- d) $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty < 3\}$
- e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 + 4x - 5 \geq 0\}$
- f) $F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_4 = 16\}$. Dabei ist $\|x\|_4 := \sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4}$
- g) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, x^2 + y^2 - z \leq -5\}$
- h) $H = \mathbb{R}^3$

3. Aufgabe:

Untersuche, in welchen Punkten die im Folgenden gegebenen Funktionen von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} stetig bzw. unstetig sind!

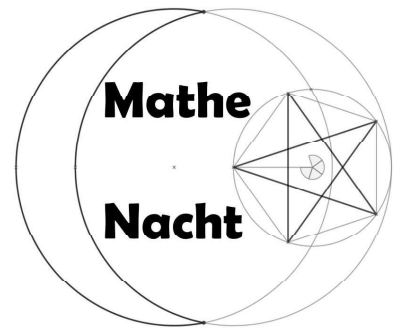
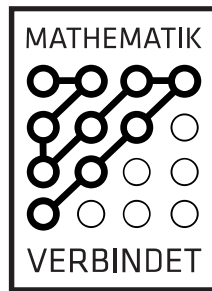
- a) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$
- b) $g(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^6} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$

4. Aufgabe:

Untersuche, ob der folgende Grenzwert existiert.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sin(x^2)}{x^2 + y^2}$$

Integralrechnung



1. Aufgabe: (Riemann-integrierbare Funktionen)

Begründen Sie nur kurz, welche der folgenden Funktionen f auf den angegebenen Intervallen Riemann-integrierbar sind.

- $f(x) = \min(x, x^2)$ auf $[-5, 5]$
- $f(x) = |x|$ auf $[-10, e]$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $[-2, 2]$
- $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ -1, & x \leq +1 \end{cases}$ auf $[-10, 10]$

2. Aufgabe: (Integraleigenschaften)

Beweisen Sie, dass die Funktion $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \int_0^{x^2} \cos(t^4)e^{-t} dt$$

monoton steigend ist.

3. Aufgabe: (Integrationsmethoden)

- a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie Stammfunktionen von $\sin(n \cdot x) \cdot \cos(m \cdot x)$ auf \mathbb{R} .
- b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(7) = 10, f(2) = 5, f'(7) = 3$. Berechnen Sie

$$\int_2^7 f''(t) \cdot (2t - 4) dt$$

- c) Die bijektiven und differenzierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g'(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$, definieren eine Funktion $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x), \forall x \in \mathbb{R}$, mit der Stammfunktion H . Zeigen Sie mit der Substitution $u = g^{-1}(x)$ die Beziehung

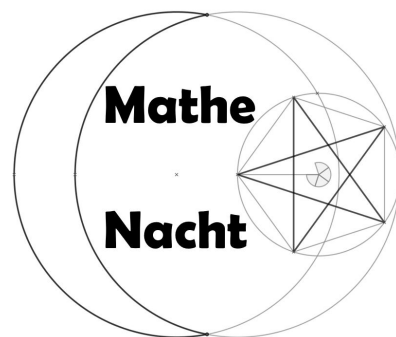
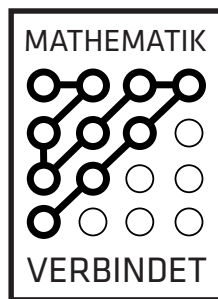
$$\int_a^b f(x) dx = H(g^{-1}(b)) - H(g^{-1}(a)) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

4. Aufgabe: (Uneigentliches Integral)

Bestimmen Sie mit Hilfe von Substitution, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende uneigentliche Integral existiert

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha} dx$$

Differentialrechnung im \mathbb{R}^n



1. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{x^2 + y^2} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. In welchen Punkten ist die Funktion stetig, partiell differenzierbar oder total differenzierbar? Begründen Sie!

2. Aufgabe:

Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y + \sin z + 42 \\ x + y^2 - y \cos z \end{pmatrix}, \quad g(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} r \sin \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \end{pmatrix},$$

mit $(x, y, z), (r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Jacobimatrizen in jedem beliebigen Punkt.

Bonus: Geben Sie alle Punkte $(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3$ an, wo $g'(r, \phi, \theta)$ nicht invertierbar ist.

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie die lokalen Extrema für

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f(x, y) = x^2 - \cos(y - x^2)$

b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, mit $g(x, y) = \operatorname{Im} \left(\frac{x^2 - y^3}{y + 2i} \right)$

4. Aufgabe:

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. ($N \in \mathbb{N}$)

- Ist $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ein stationärer Punkt einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, dann hat auch f^2 dort einen stationären Punkt
- Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$ nimmt auf $D = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 = 6 - |y|\}$ sein Minimum und Maximum an.
- Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

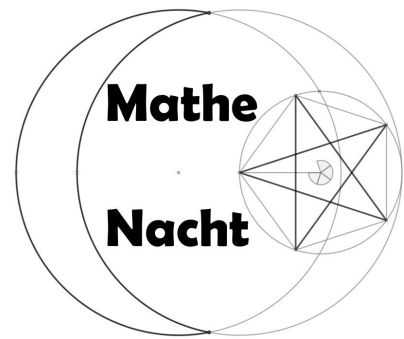
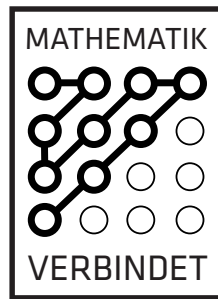
gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R}^N : (f'(x))^T = f'(x)$$

5. Aufgabe:

Berechnen Sie die Richtungsableitungen von $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f(x, y) = x^y$ in den Richtungen $v_1 := (1, 1)^T$, $v_2 := (1, e)^T$.

Anwendungen Differentialrechnung



1. Aufgabe: (Ankreuzen)

Welche der folgenden Voraussetzungen müssen erfüllt sein, um das Taylorpolynom einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ aufstellen zu können?

- $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist n -mal differenzierbar
- $x_0 \in [a, b]$
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist $(n + 1)$ -mal differenzierbar
- $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist kontraktiv

2. Aufgabe: (Taylorpolynome und -reihen)

- a) Berechne $\sin(1)$ mit dem ersten und dritten Taylorpolynom in $x_0 = 0$. Bestimme jeweils eine obere Schranke für den Fehler.
- b) Bestimme die Taylorreihe von $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1 + x)$ in $x_0 = 0$.
Extra: Wie sieht $T_3(\sqrt{1 + x^2}, 0)$ aus?

3. Aufgabe: (Newton-Verfahren)

- a) Bestimme die beiden Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + x - 3$ mit dem Newton-Verfahren auf 2 Nachkommastellen.
- b) Bestimme $\sqrt{5}$ mit dem Newton-Verfahren auf 2 Nachkommastellen. Gib mit Satz 8.3.1 eine obere Schranke für den Fehler an.

4. Aufgabe: (Fixpunkt)

Beweise: $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ln(\arctan^2(x) + 1)$ besitzt genau einen Fixpunkt.

5. Aufgabe: (Umkehrsatz)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

- i) Ist die Funktion injektiv?
- ii) Gibt es Punkte in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, an denen die Funktion lokal umkehrbar ist?