Topologie und Stetigkeit

1. Aufgabe:

Es sei $||\cdot|| : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ gegeben durch:

$$||(x,y)|| := |y| + |3x - 2y|$$

Untersuche, ob dadurch eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

2. Aufgabe:

Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ offen/ abgeschlossen/beschränkt (bezüglich der euklidischen Norm) sind. Gib außerdem zu jeder Menge die Menge aller Randpunkte und das Innere an. Skizziere die Mengen A, B, C, D, E.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_1 \leq 2\}$

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0\} \cup \{(2,3)\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq ||x||_2 < 4\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_\infty < 3\}$

e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 + 4x - 5 \geq 0\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_4 = 16\}$. Dabei ist $||x||_4 := \sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4}$

g) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, x^2 + y^2 - z \leq -5\}$

h) $H = \mathbb{R}^3$

3. Aufgabe:

Untersuche, in welchen Punkten die im Folgenden gegebenen Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ stetig bzw. unstetig sind!

a) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$

b) $g(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^6} & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$

4. Aufgabe:

Untersuche, ob der folgende Grenzwert existiert.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin(x^2)}{x^2 + y^2}$$

Integralrechnung

1. Aufgabe: (*Riemann-integrierbare Funktionen*)

Begründen Sie nur kurz, welche der folgenden Funktionen f auf den angegebenen Intervallen Riemann-integrierbar sind.

- ☐ $f(x) = \min(x, x^2)$ auf $[-5, 5]$
- ☐ $f(x) = |x|$ auf $[-10, e]$
- ☐ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $[-2, 2]$
- ☐ $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ -1, & x \leq +1 \end{cases}$ auf $[-10, 10]$

2. Aufgabe: (*Integraleigenschaften*)

Beweisen Sie, dass die Funktion $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \int_0^{x^2} \cos(t^4) e^{-t} dt$$

monoton steigend ist.

3. Aufgabe: (*Integrationsmethoden*)

a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie Stammfunktionen von $\sin(n \cdot x) \cdot \cos(m \cdot x)$ auf $\mathbb{R}$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(7) = 10, f(2) = 5, f'(7) = 3$. Berechnen Sie

$$\int_2^7 f''(t) \cdot (2t - 4) dt$$

c) Die bijektiven und differenzierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g'(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$, definieren eine Funktion $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, mit der Stammfunktion H. Zeigen Sie mit der Substitution $u = g^{-1}(x)$ die Beziehung

$$\int_a^b f(x) dx = H(g^{-1}(b)) - H(g^{-1}(a)) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

4. Aufgabe: (*Uneigentliches Integral*)

Bestimmen Sie mit Hilfe von Substitution, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende uneigentliche Integral existiert

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha} dx$$

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

1. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{x^2+y^2} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. In welchen Punkten ist die Funktion stetig, partiell differenzierbar oder total differenzierbar? Begründen Sie!

2. Aufgabe:

Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y + \sin z + 42 \\ x + y^2 - y \cos z \end{pmatrix},\ g(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} r \sin\phi \cos\theta \\ r \sin\phi \sin\theta \\ r \cos\phi \end{pmatrix},$$

mit $(x,y,z), (r,\phi,\theta) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Jacobimatrizen in jedem beliebigen Punkt.
Bonus: Geben Sie alle Punkte $(r,\phi,\theta) \in \mathbb{R}^3$ an, wo $g'(r,\phi,\theta)$ nicht invertierbar ist.

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie die lokalen Extrema für

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $f(x,y) = x^2 - \cos(y - x^2)$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $g(x,y) = \operatorname{Im}\left(\frac{x^2-y^3}{y+2i}\right)$

4. Aufgabe:

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. $(N \in \mathbb{N})$

- ☐ Ist $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ein stationärer Punkt einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, dann hat auch f^2 dort einen stationären Punkt
- ☐ Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x \cdot \sin(y)$ nimmt auf $D = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 = 6 - |y|\}$ sein Minimum und Maximum an.
- ☐ Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

  $$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

  gilt:

  $$\forall x \in \mathbb{R}^N : (f'(x))^T = f'(x)$$

5. Aufgabe:

Berechnen Sie die Richtungsableitungen von $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x,y) = x^y$ in den Richtungen $v_1 := (1,1)^T,\ v_2 := (1,e)^T$.

Anwendungen Differentialrechnung

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe: (*Ankreuzen*)

Welche der folgenden Voraussetzungen müssen erfüllt sein, um das Taylorpolynom einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ aufstellen zu können?

- ☐ $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist n-mal differenzierbar
- ☐ $x_0 \in [a, b]$
- ☐ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist $(n + 1)$-mal differenzierbar
- ☐ $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist kontraktiv

2. Aufgabe: (*Taylorpolynome und -reihen*)

a) Berechne $\sin(1)$ mit dem ersten und dritten Taylorpolynom in $x_0 = 0$. Bestimme jeweils eine obere Schranke für den Fehler.

b) Bestimme die Taylorreihe von $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1 + x)$ in $x_0 = 0$.
Extra: Wie sieht $T_3(\sqrt{1 + x^2}, 0)$ aus?

3. Aufgabe: (*Newton-Verfahren*)

a) Bestimme die beiden Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + x - 3$ mit dem Newton-Verfahren auf 2 Nachkommastellen.

b) Bestimme $\sqrt{5}$ mit dem Newton-Verfahren auf 2 Nachkommastellen. Gib mit Satz 8.3.1 eine obere Schranke für den Fehler an.

4. Aufgabe: (*Fixpunkt*)

Beweise: $f : [0, 1]\,\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ln(\arctan^2(x) + 1)$ besitzt genau einen Fixpunkt.

5. Aufgabe: (*Umkehrsatz*)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

i) Ist die Funktion injektiv?

ii) Gibt es Punkte in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, an denen die Funktion lokal umkehrbar ist?